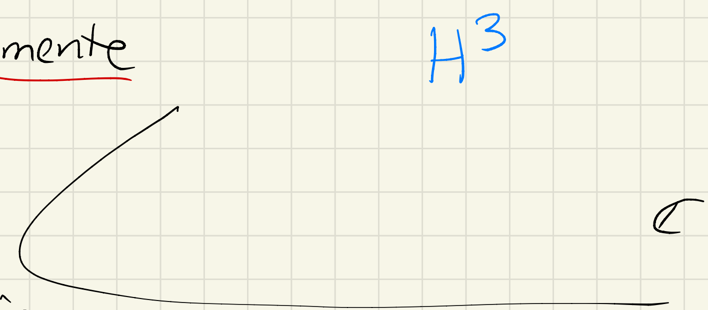
Geometria iperbolica

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \right\}$$

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \mathbb{P}SL_2(\mathbb{C}) = \quad " \quad "$$

agiscono su $\partial \mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

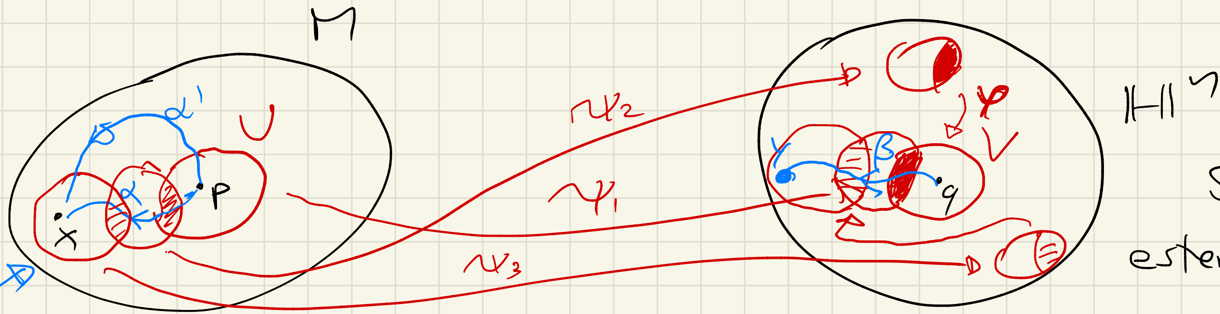
Def: Una VARIETÀ IPERBOLICA (PIATTA, ELLITTICA / EUCLIDEA, SFERICA) è una M Riemanniana che è localmente isometrica a $\mathbb{H}^n$ $(\mathbb{R}^n, S^n)$



Es: $U \subseteq \mathbb{H}^n$ aperto è varietà iperbolica (non è completa se $U \neq \mathbb{H}^n$)

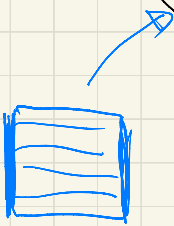
Teo: M^n iperbolica (piatta, sferica) completa e $\pi_1(M) = \{e\} \Rightarrow M \overset{\text{isometria}}{\cong} \mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$, S^n)

dim:



Scelgo V e ψ

estendo ψ a



mappa $D: M \to \mathbb{H}^n$ MAPPA SVILUPPANTE

$D(x) := y$ non dipende da α perché M è sempl. connessa.

$D: M \to \mathbb{H}^n$ è isometria locale per costruzione

M completa $\Rightarrow$ D rivestimento $\xrightarrow[\pi_1(\mathbb{H}^n) = \{e\}]{}$ D è 1-1

$\Rightarrow$ D isometria $\square$

<u>Teo</u>: M iperbolica/piatta/ellittica $\Leftrightarrow$ $K \equiv -1/0/1$

<u>Prop</u>: M iperbolica completa $\Leftrightarrow$ $M \underset{\text{isometria}}{\cong} \mathbb{H}^n/\Gamma$ $\quad \Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ che agisce libero & propr. disc.

dim:
$$\begin{array}{c}\tilde M\\ \downarrow\\ M\end{array}$$ riv. univ. $\quad M$ completa $\Rightarrow \tilde M$ completa $\Rightarrow \tilde M \cong \mathbb{H}^n$

$\pi_1(\tilde M) = \{e\}$

$$\begin{array}{c}\mathbb{H}^n\\ \big\downarrow \pi\\ M\end{array}$$ rivestimento + isom. locale

regolare $\Rightarrow M = \mathbb{H}^n / \mathrm{Aut}(\pi)$

$\Gamma = \mathrm{Aut}(\pi) < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ $\square$

$$\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = O^+(n,1)$$

Oss: Azione è libera $\Leftrightarrow$ Γ non contiene ellittici

Prop: " " propr. disc. $\Leftrightarrow$ $\Gamma < O^+(n,1)$ è sottoinsieme discreto

VERO IN GENERALE

Cor: $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ iperbolica completa} \\ \text{a meno di isometria} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) \text{ discreti senza ellittici} \\ \text{a meno di coniugio} \end{array} \right\}$

$M \leftarrow \tilde M \cong \mathbb{H}^n \rightarrow \Gamma$

SOTTOGRUPPI DISCRETI DI $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = O^+(n,1)$

Se $\Gamma < O^+(n,1)$ è discreto:

- Γ è numerabile, può non essere f.g.
- $p \in \mathbb{H}^n$, $\Gamma_p < \Gamma$ stabilizzatore. Γ_p è finito
- $\Gamma(p)$ orbita di p $\quad \Gamma(p) \subseteq \mathbb{H}^n$ discreto
- Γ_p è banale in molti punti:

<u>Prop</u>: $\{p : \Gamma_p \text{ banale}\} \subseteq \mathbb{H}^n$ aperto denso.

<u>dim</u>:

<u>Ex</u>: $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) \Rightarrow \mathrm{Fix}(\varphi) \subseteq \mathbb{H}^n$ sottospazio

$\{\mathrm{Fix}(\varphi) \mid \underset{\text{non id}}{\varphi \in \Gamma}\}$ è un insieme loc. finito di sottospazi di $\mathbb{H}^n$

$$\bigcup \overset{\shortparallel}{\{p : \Gamma_p \text{ non è banale}\}}$$

$\square$

Prop: $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ discreto.

Γ agire libero $\Leftrightarrow$ Γ non contiene ellittici $\Leftrightarrow$ Γ non ha torsione

ogni $g \in \Gamma$ $g \neq e$ ha ordine ∞

dim: $\boxed{\Rightarrow}$ ovvia

$\boxed{\Leftarrow}$ usiamo Γ discreto

Se $\Gamma \ni g$ ellittico $\Rightarrow$ ha ordine finito $\square$

Cor: M iperbolica completa $\Rightarrow$ $\pi_1(M)$ non ha torsione

dim: $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ $\quad$ Γ non ha torsione

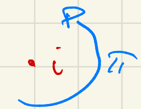
Esempio: $\Gamma = \mathbb{P}SL_2(\mathbb{Z}) < \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^+(H^2)$

$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad ad-bc=1 \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

Γ è discreto

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad z \mapsto -\frac{1}{z}$ $\quad tr A = 0$ ellittica $\quad i$ è punto fisso

$A^2 = -I \sim I$



Congruence subgroups: $\quad m \geq 2$

$SL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ gruppo finito $\qquad \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ induce

$$0 \to \underset{\text{Kernel}}{\Gamma(m)} \to \mathbb{P}SL_2\mathbb{Z} \xrightarrow[\pi]{} \underbrace{\mathbb{P}SL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})}_{\text{finito}} \to 0$$

$\Gamma(m) < \mathbb{P}SL_2(\mathbb{Z})$ indice finito

$\Gamma(m)$ è discreto

Prop: $m \geq 4 \Rightarrow \Gamma(m)$ non ha torsione

dim: $\quad A \in \Gamma(m) \quad A = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod m$

$\mathrm{tr}\,A = a+d \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod m \Rightarrow \mathrm{tr}\,A \notin \{-1,0,1\}$

Quindi A non è ellittica.

Cor: $M = \mathbb{H}^2 / \Gamma(m)$ superficie iperbolica completa

Lemma di Selberg: $\Gamma < GL(n,\mathbb{C})$ f.g.

$\exists\ \Gamma' \underset{\text{i.f.}}{\triangleleft} \Gamma$ senza torsione

INDICE FINITO

Cor: $\underset{\text{discreto}}{\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)}$ f.g. $\Rightarrow \exists\ \Gamma' \underset{\text{i.f.}}{\triangleleft} \Gamma$ senza torsione

agisce in modo libero

$\Rightarrow M = \mathbb{H}^n / \Gamma'$ varietà iperbolica completa

Rivestimenti: $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^n$ $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ lib & propr. disc.

$\underset{i}{\Gamma' < \Gamma} \Rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma \xleftarrow{i} \mathbb{H}^n/\Gamma'$ rivestimento

$$\mathrm{Vol}\left(\mathbb{H}^n/\Gamma'\right) = i \cdot \mathrm{Vol}\left(\mathbb{H}^n/\Gamma\right)$$

Residuale finitezza: $\Gamma < GL(n, \mathbb{C})$ f.g. $\Rightarrow$ Γ è RESIDUALMENTE FINITO

cioè $\forall g \in \Gamma$ $g \neq e$, $\exists\ \Gamma' \underset{i.f.}{\triangleleft} \Gamma$ $\Gamma' \not\ni g$

POLIEDRI

Def: Un SEMISPAZIO in $\mathbb{H}^n$ è (la chiusura) di una delle sue parti di $\mathbb{H}^n$ delimitate da un iperpiano $H \subseteq \mathbb{H}^n$

Def: Un POLIEDRO in $\mathbb{H}^n$ è un $P \subseteq \mathbb{H}^n$ t.c. $P = \bigcap_{i \in I} H_i$ con $\{H_i\}$ collezione loc. finita di semispazi e $\mathrm{int}(P) \neq \emptyset$

Def: $P \subseteq \mathbb{H}^n$ poliedro $\underset{\text{semispazio}}{H} \supseteq P$ Se $\partial H \cap P = F \neq \emptyset$ F è FACCIA di P

Se $F \subseteq P$ faccia, il suo PIANO DI SUPPORTO è il più piccolo sottospazio che contiene F

$\dim F := \dim S$

Ex: 1) Intersezioni di facce è $\emptyset$ o faccia

2) Ogni F è poliedro in S

3) P è convesso

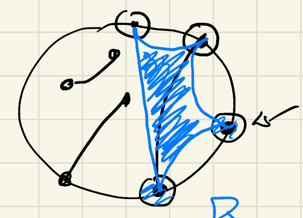
4) $\mathrm{Inv}(x_1, \dots, x_k) = P$ è poliedro

$x_1, \dots, x_k \in \overline{\mathbb{H}}^n$

5) P cpt $\iff$ $P = \mathrm{Inv}$(suoi vertici)

e ha un $\# < +\infty$ di vertici

(INVILUPPO) CONVESSO in $\overline{\mathbb{H}}^n$



non è cpt

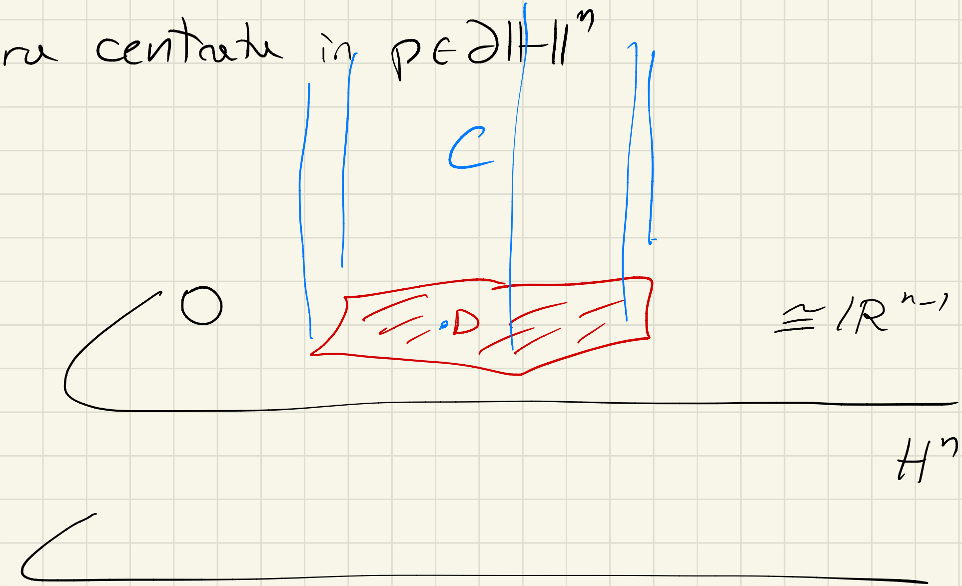
Def: Un poliedro $P = \mathrm{Inv}(\underbrace{x_1, \dots, x_k}) \quad x_i \in \overline{\mathbb{H}}^n$

è un POLIEDRO FINITO

Quelli in $\partial \mathbb{H}^n$ sono VERTICI IDEALI

Lemma $O \subseteq \mathbb{H}^n$ orosfera centrata in $p \in \partial \mathbb{H}^n$

$$\mathrm{Vol}(C) = \frac{\mathrm{Vol}_O(D)}{n-1}$$



dim:

$$\mathrm{Vol}(C) = \int_D dx \int_h^{+\infty} \frac{1}{t^n}\, dt =$$

$$= \frac{1}{n-1} \int_D \frac{1}{h^{n-1}} = \frac{1}{n-1} \mathrm{Vol}_O(D)$$

$O = \{x_n = h\}$ $\quad g = \frac{1}{x_n^2} g^E$

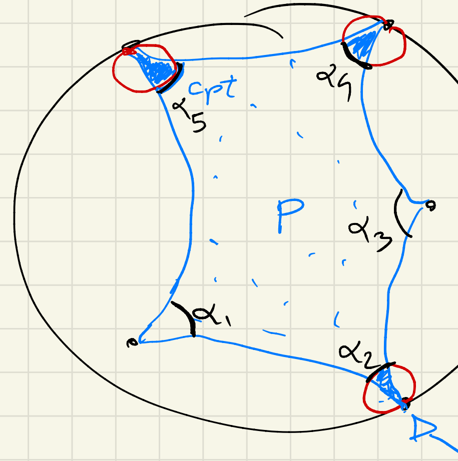
$$\omega = \frac{1}{x_n^n}\omega^E$$

Cor: P finito $\Rightarrow \mathrm{Vol}(P) < +\infty$

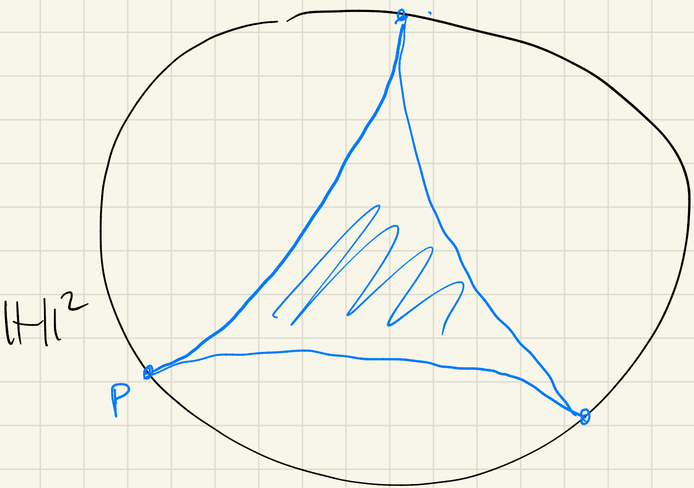
Prop: $P \subseteq \mathbb{H}^2$ poligono finito con angoli interni $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\mathrm{Area}(P) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

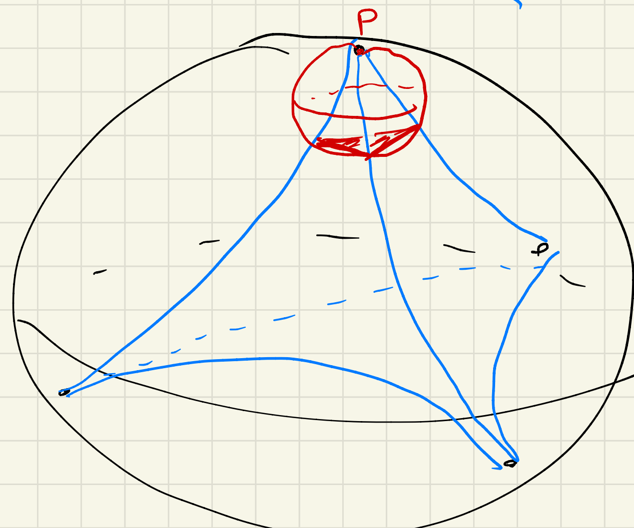
Cor: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < (n-2)\pi$



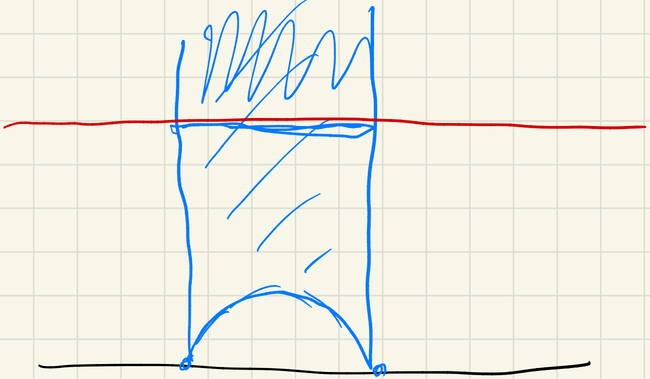
$\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$

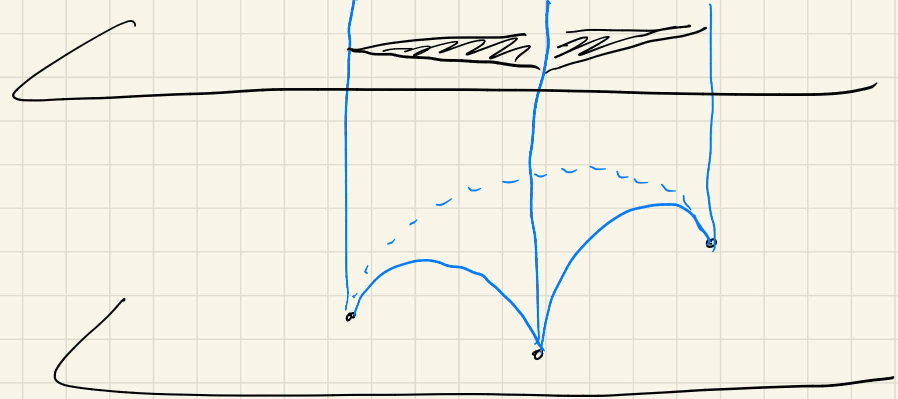


TRIANGOLO IDEALE

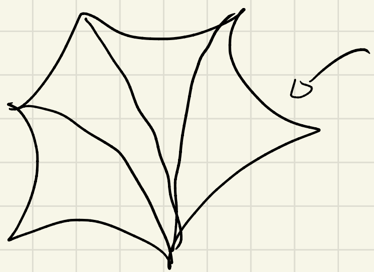


TETRAEDRO IDEALE





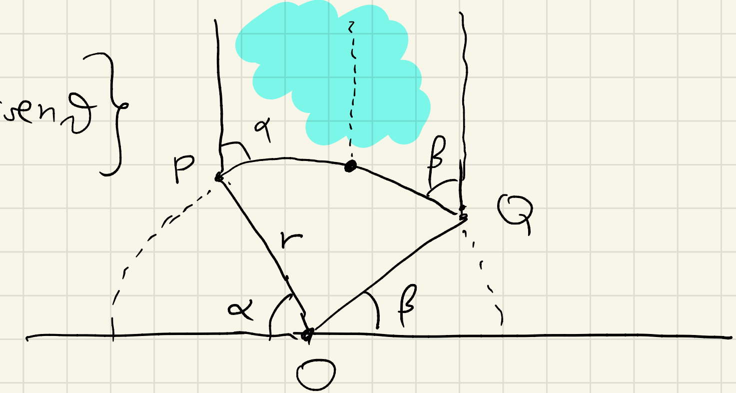
dim



dimo per ogni triangolo

T triangolo con angoli $\alpha, \beta, \gamma = 0$ per adesso

$$T = \{ (r\cos\vartheta, y) \mid \beta \le \vartheta \le \pi - \alpha,\ y \ge r\,\mathrm{sen}\,\vartheta \}$$



$$\mathrm{Area}(T) = \int_T \frac{1}{y^2}\,dx\,dy =$$

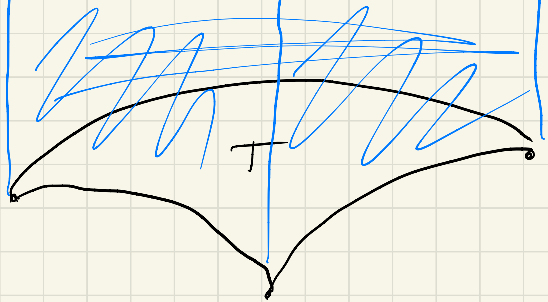
T

$$= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \int_{r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}^{+\infty} \frac{-r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{y^2}\,dy\,d\vartheta =$$

$$x = r\cos\vartheta$$

$$dx = \underline{-r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\,d\vartheta$$

$$= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} -r\,\mathrm{sen}\,\vartheta \left[-\frac{1}{y} \right]_{r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}^{\infty} d\vartheta = \int_{\beta}^{\pi-\alpha} \frac{r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\,d\vartheta = \pi - \alpha - \beta.$$



$$\mathrm{Area}(T) = \mathrm{Area}(T_1) - \mathrm{Area}(T_2) - \mathrm{Area}(T_3)$$

$\square$